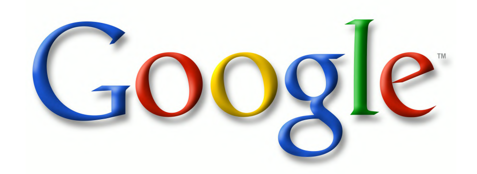
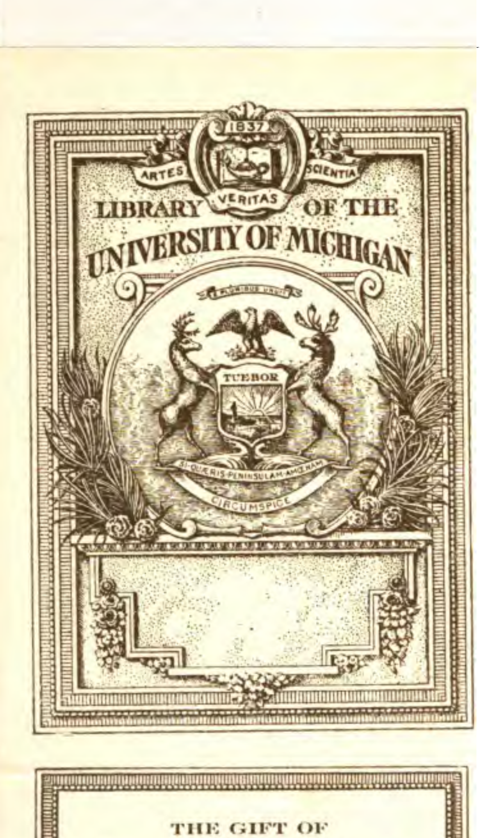
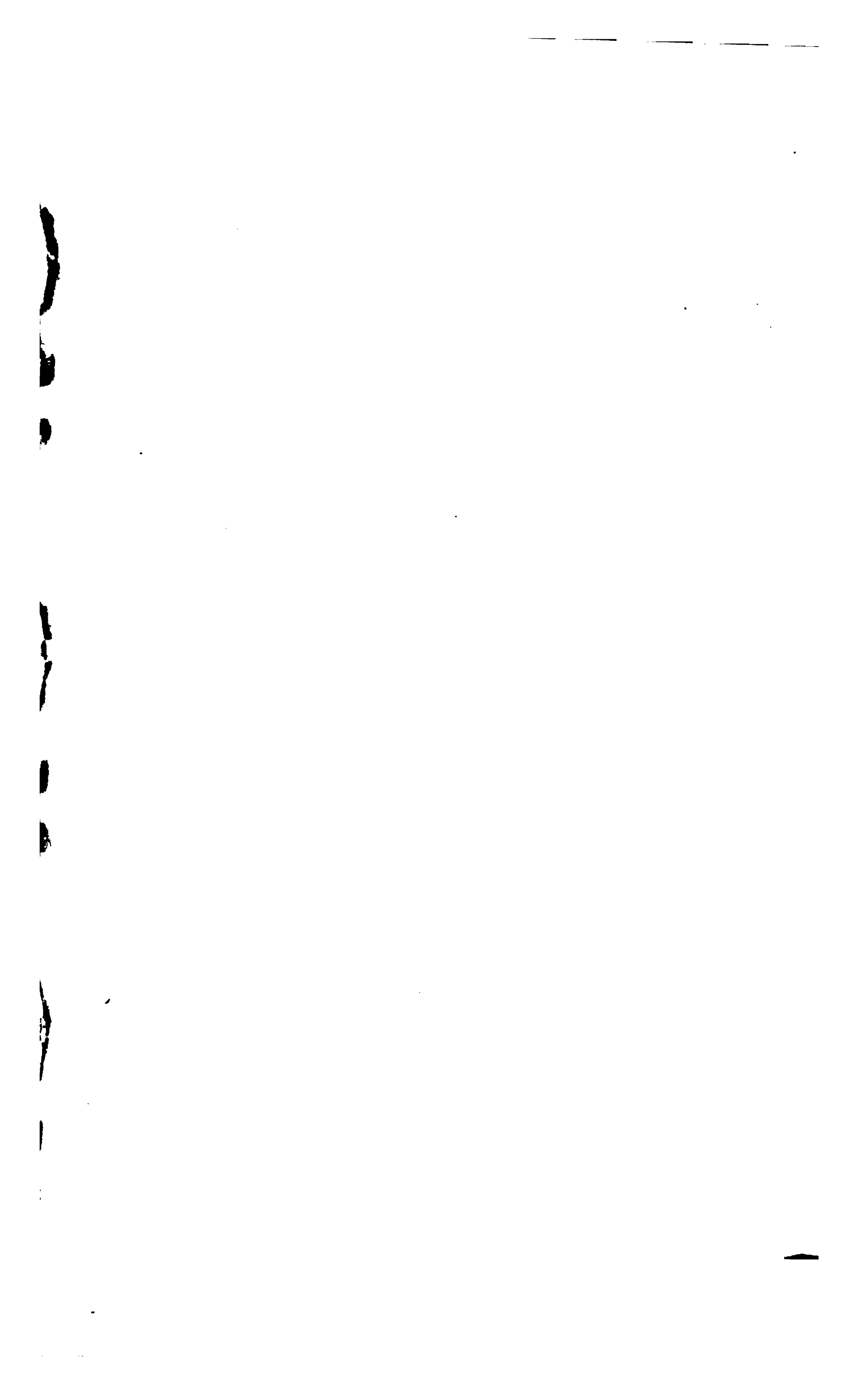
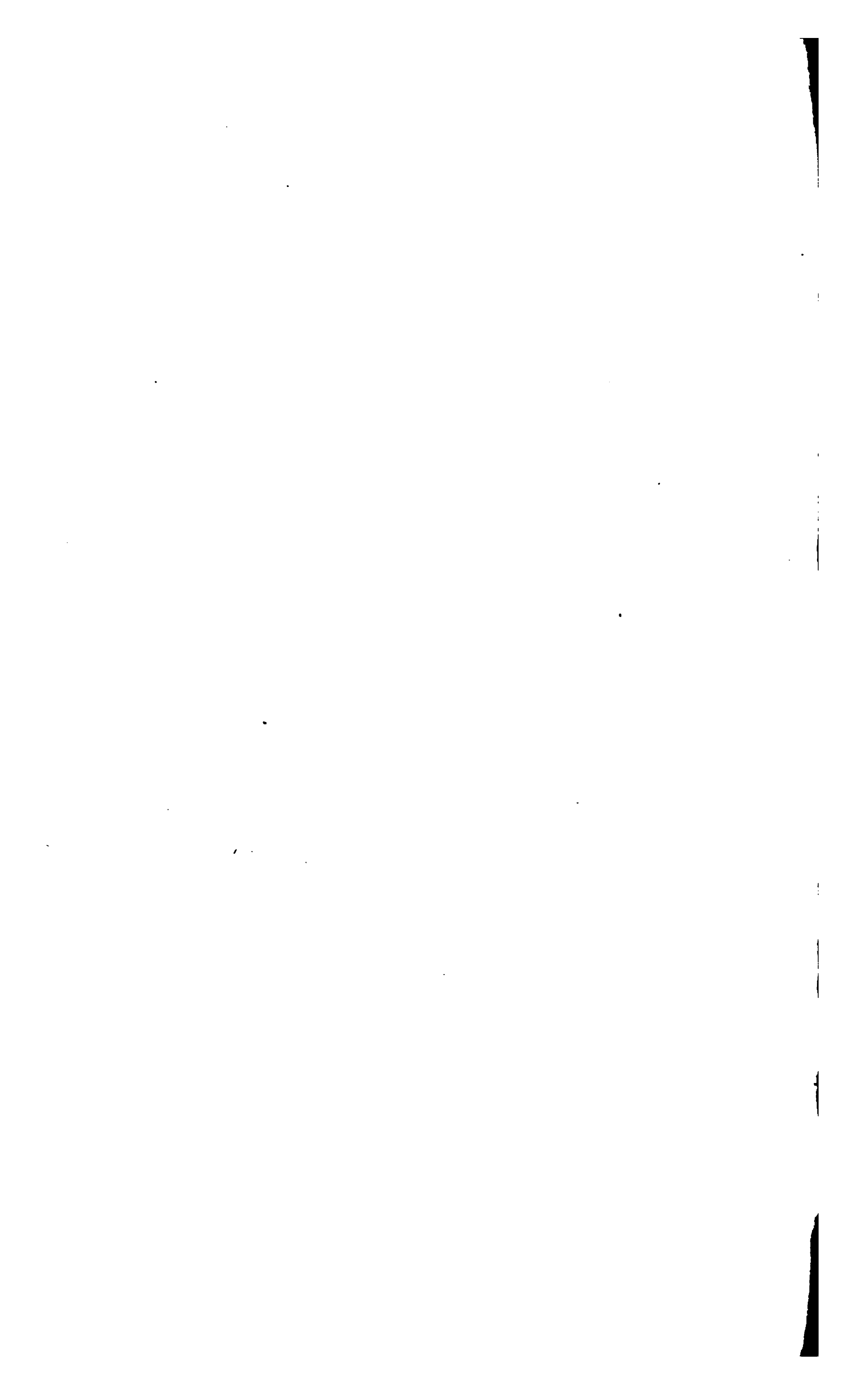



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE





Analytische Untersuchungen
über
ein Problem der Dynamik.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

philosophischen Facultät

der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

eingereicht und mit den beigefügten Thesen vertheidigt

am 8. August 1884, Mittags 12 Uhr

von

Ludwig Sonnenburg
aus Bonn.

Opponenten:

C. Pulfrich, Dr. phil.
P. Lüttger, cand. math.
M. Bleibtreu, cand. math.

Bonn,

Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi.

1884.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. R. Lipschitz

in dankbarer Ergebenheit

gewidmet

vom Verfasser.

I.

§. 1.

Auf einer graden Linie, welche ein anziehendes oder abstossendes Centrum enthält, befinden sich hinter einander n Massenpunkte, welche durch starre, gewichtlose Fäden fest mit einander verbunden sind und sich auf der Graden bewegen können; es soll die Bewegung betrachtet werden, welche entsteht, wenn die von dem Centrum ausgeübte Kraft nach einer Funktion der Entfernung auf jeden der Massenpunkte wirkt und jene Grade sich um das Centrum dreht. Das Problem kann auch folgendermassen ausgesprochen werden: Auf einer Graden bewegt sich unter der Einwirkung einer Centralkraft eine Strecke, welche an einzelnen Punkten mit Masse behaftet ist. Der Sitz jener Kraft ist ein Punkt der Graden und dieser ist der einzige feste Punkt derselben.

Die relative Lage der n angezogenen Massenpunkte ist also unveränderlich, da die gegenseitigen Entfernungen der Punkte des bewegten Systems constante Grössen sind. Dieser Umstand gibt $n - 1$ Bedingungsgleichungen. Dass ferner die Punkte während ihrer Bewegung dieselbe grade Linie nicht verlassen dürfen, wird sich ebenfalls in der analytischen Behandlung durch eine Anzahl von Bedingungsgleichungen kund geben.

Zur Bestimmung der Lage der Punkte wollen wir uns eines rechtwinkligen Coordinatensystems bedienen, welches das anziehende Centrum zum Anfangspunkte hat.

Die n angezogenen Massenpunkte mögen der Reihe nach die Coordinaten:

$$x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \quad \ldots x_n, y_n, z_n$$

haben. Die ersten $n-1$ Bedingungsgleichungen drücken sich dann in folgender Weise aus:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=g_2$$
$$\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}=g_3$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2+(z_n-z_1)^2}=g_n,$$

wobei $g_2, g_3 \ldots g_n$ Constanten sind. Diese Gruppe von Bedingungsgleichungen möge allgemein mit $\Phi_\alpha = o$ bezeichnet werden. Dabei vertritt α die Zeiger von 2 bis n. Die hinzutretende Bedingung, dass die n Punkte auf der Graden bleiben, sagt, dass die Veränderungen der Coordinaten bei der Bewegung in demselben Verhältnis geschehen müssen. Dieses gibt $2(n-1)$ Bedingungsgleichungen, etwa die folgenden:

$$x_1y_2 - x_2y_1 = o \qquad x_1z_2 - x_2z_1 = o$$
$$x_1y_3 - x_3y_1 = o \qquad x_1z_3 - x_3z_1 = o$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$x_1y_n - x_ny_1 = o \qquad x_1z_n - x_nz_1 = o.$$

Jede dieser Gleichungen mag mit $\Psi_\beta = o$ bezeichnet werden, wobei β eine der Zahlen von 1 bis $2n-2$ ist. Bezeichnen wir nun die Kräftefunktion mit U und die Massen der Punkte mit m und dem jedesmaligen Zeiger, welchen die Coordinaten des betreffenden Punktes an sich tragen, so lassen sich die Bewegungsgleichungen nach der Weise von Lagrange mit Anwendung der unbestimmten Multiplicatoren aufstellen wie folgt:

$$m_a \frac{d^2x_a}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_a} + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_a} + \sum_{\beta=1}^{\beta=2(n-1)} \mu_\beta \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial x_a}$$
$$m_a \frac{d^2y_a}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_a} + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_a} + \sum_{\beta=1}^{\beta=2(n-1)} \mu_\beta \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial y_a}$$
$$m_a \frac{d^2z_a}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_a} + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=n} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_a} + \sum_{\beta=1}^{\beta=2(n-1)} \mu_\beta \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial z_a}$$

In dieser Aufstellung durchläuft a die Werte von 1 bis n. Es werden somit durch dieselbe n Systeme von je 3 Gleichungen dargestellt. Durch Multiplication dieser Gleichungen resp. mit $\frac{dx_a}{dt}, \frac{dy_a}{dt}, \frac{dz_a}{dt}$ erhält man, nachdem man addiert und alsdann die so entstehenden n Gleichungen wieder addiert hat, durch Integration auf beiden Seiten das Integral der lebendigen Kraft:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} m_\alpha \left\{ \left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2 \right\} = 2U + 2H.$$

Ausser diesem Integral lassen sich aus den obigen $3n$ Gleichungen drei weitere ableiten, nämlich die drei Flächensätze. Dass dieselben hier gelten, erkennt man auch daraus, dass die sämmtlichen Bedingungsgleichungen die folgende Eigenschaft haben:

Nennen wir ganz allgemein jede der Bedingungsgleichungen:

$$b_x = o,$$

so gelten die drei Gleichungen [1]:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \left(z_\alpha \frac{\partial b_x}{\partial y_\alpha} - y_\alpha \frac{\partial b_x}{\partial z_\alpha} \right) = o$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \left(x_\alpha \frac{\partial b_x}{\partial z_\alpha} - z_\alpha \frac{\partial b_x}{\partial x_\alpha} \right) = o$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \left(y_\alpha \frac{\partial b_x}{\partial x_\alpha} - x_\alpha \frac{\partial b_x}{\partial y_\alpha} \right) = o.$$

Ausserdem ist vorausgesetzt, dass U eine Funktion der Entfernung der Massenpunkte vom Anfangspunkte der Coordinaten ist, so dass dasselbe als $\sum_{a=1}^{a=n} m_a F(r_a)$ bezeichnet werden kann; es ist dann unter r_a die positive Quadratwurzel:

$$\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

zu verstehen.

---

1) Jacobi, Vorlesungen üb. Dynamik, 5. Vorl. p. 33.

Es ist daher:

$$\frac{\partial U}{\partial x_a} = m_a \frac{dF(r_a)}{dr_a} \frac{x_a}{r_a}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y_a} = m_a \frac{dF(r_a)}{dr_a} \frac{y_a}{r_a}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z_a} = m_a \frac{dF(r_a)}{dr_a} \frac{z_a}{r_a}$$

und somit auch:

$$z_a \frac{\partial U}{\partial y_a} - y_a \frac{\partial U}{\partial z_a} = o$$
$$x_a \frac{\partial U}{\partial z_a} - z_a \frac{\partial U}{\partial x_a} = o$$
$$y_a \frac{\partial U}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial U}{\partial y_a} = o.$$

Man erhält somit die Gleichungen, welche die drei Flächensätze enthalten:

$$\sum_{a=1}^{n} m_a \left(z_a \frac{dy_a}{dt} - y_a \frac{dz_a}{dt} \right) = A$$
$$\sum_{a=1}^{n} m_a \left(x_a \frac{dz_a}{dt} - z_a \frac{dx_a}{dt} \right) = B$$
$$\sum_{a=1}^{n} m_a \left(y_a \frac{dx_a}{dt} - x_a \frac{dy_a}{dt} \right) = C.$$

Die vier Integrations-Constanten H, A, B, C bestimmen sich aus dem Anfangszustande, welcher zur vollständigen Bestimmung der Bewegung gegeben sein muss. Diese Initial-Werte der Variablen sollen im Folgenden immer durch den angehängten Zeiger o angedeutet werden.

Denkt man sich die Flächensätze vollständig geschrieben und wählt unter den Zahlen von 1 bis n eine beliebige aus, dieselbe heisse $\varkappa$, multipliciert alsdann die drei Gleichungen resp. mit $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ und addiert die Resultate, so erhält man:

$$Ax_\varkappa + By_\varkappa + Cz_\varkappa = o.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, weil diejenigen Glieder, deren

Elemente nach der ausgeführten Multiplication nur den Zeiger $\varkappa$ an sich tragen, sich gegenseitig aufheben, die übrigen aber wegen des Bestehens der Bedingungsgleichungen $\Psi_\beta = o$ verschwinden.

Differentiiert man die Gleichung

$$Ax_\varkappa + By_\varkappa + Cz_\varkappa = o$$

nach t, so kommt:

$$A\frac{dx_\varkappa}{dt} + B\frac{dy_\varkappa}{dt} + C\frac{dz_\varkappa}{dt} = o.$$

Man erhält so Gleichungen einer und derselben Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Die Coordinaten derselben sind das eine Mal die Örter der Massenpunkte, das andere Mal die Geschwindigkeiten derselben, woraus hervorgeht, dass die sich bewegende Grade und die Direktion der Geschwindigkeit immer in derselben Ebene bleiben. Diese Ebene wird durch die anfängliche Lage der Graden und die Anfangs-Richtung der Geschwindigkeit vollständig bestimmt.

Sollte $A = B = C = o$ sein, so ist jeder einzelne der Klammerausdrücke, welche auf den linken Seiten der Flächensätze stehen, gleich Null. Es bedeuten diese nämlich, wie bekannt, die doppelten Inhalte der Dreiecke, welche bei der Drehung des Systems um einen elementaren Winkel von den Projektionen der Radienvectoren auf den Coordinaten-Ebenen überstrichen werden. Das Vorzeichen dieser Ausdrücke, welche unter demselben Summenzeichen stehen, ist stets dasselbe, da die Drehungen aller Punkte in demselben Sinne geschehen müssen. Es haben alle jene Summanden somit dasselbe Vorzeichen, indem $m_1, m_2, \ldots m_n$ positive Grössen sind. Es verschwindet daher jedes von jenen Dreiecken. Eine Drehung des Systems ist also bei der Annahme $A = B = C = o$ überhaupt nicht möglich, die Bewegung kann nur in einem Fortschreiten auf der in ihrer Anfangslage festen Graden bestehen.

§. 2.

Da sich somit gezeigt hat, dass das bewegte System in derselben Ebene bleibt, so werden wir statt des räumlichen Coordinatensystems ein ebenes, rechtwinkliges einführen können, welches wiederum den anziehenden Punkt zum Anfangspunkt hat. Wenn wir in diesem die Örter der n angezogenen Punkte mit:

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots \xi_n, \eta_n$$

bezeichnen, so vereinfachen sich die Differentialgleichungen des Problems. Es treten dann $2n$ Coordinaten auf. Der Umstand, dass die Punkte constante Entfernungen von einander haben, wird $n-1$ Bedingungsgleichungen ergeben, der andere, dass alle Punkte auf derselben Graden bleiben müssen, ergibt ebenfalls $n-1$ Bedingungsgleichungen von der Gestalt:

$$\xi_1 \eta_x - \xi_x \eta_1 = o$$

(x nimmt die Werte von 2 bis n an). Die Zahl der Variablen ist daher 2.

Indem wir solche Veränderliche einführen, welche die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen, gelangen wir zu der geringsten Zahl der Variablen. Diese würden mit den rechtwinkligen Coordinaten zusammenhängen durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \xi_1 = (r+g_1)\cos\vartheta & \eta_1 = (r+g_1)\sin\vartheta \\ \xi_2 = (r+g_2)\cos\vartheta & \eta_2 = (r+g_2)\sin\vartheta \\ \vdots & \vdots \\ \xi_n = (r+g_n)\cos\vartheta & \eta_n = (r+g_n)\sin\vartheta. \end{array}$$

Die Grösse g_1 hat bei allen Rechnungen stets den Wert Null, dieselbe ist nur eingeführt, um die Concinnität in den Formeln zu erhalten. r bedeutet den Abstand eines der beiden äussern Punkte des Systems — es mag (ξ_1, η_1) sein — vom Anfange der Coordinaten. Derselbe ist positiv zu rechnen, so lange sich der Punkt (ξ_1, η_1) auf der

einen beliebig festzusetzenden Seite der Graden befindet, wird dagegen negativ, wenn der betrachtete Punkt über den Nullpunkt auf die andere Seite der Graden gerückt ist. Die Grössen $g_1, g_2 \ldots g_n$ sind stets positiv hinzuzufügen. Der Winkel ϑ ist der Drehungswinkel der Graden, welcher von der positiven Seite der ξ-Axe zur positiven Seite der η-Axe wachsend fortschreitet. Ist sein Spielraum zwischen o und 2π festgesetzt, so ist diese Ortsbestimmung eine vollständige. Führt man diese neuen Variablen in die Gleichungen

$$\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2}=g_2$$
$$\sqrt{(\xi_3-\xi_1)^2+(\eta_3-\eta_1)^2}=g_3$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{(\xi_n-\xi_1)^2+(\eta_n-\eta_1)^2}=g_n$$
$$\xi_1:\xi_2:\ldots:\xi_n=\eta_1:\eta_2:\ldots:\eta_n$$

ein, so sind diese offenbar identisch erfüllt.

Das Integral der lebendigen Kraft drückt sich in den neuen Veränderlichen folgendermassen aus:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha r'^2 + \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r+g_\alpha)^2 \vartheta'^2 = 2U + 2H.$$

Nach dem Vorgange von Lagrange sind die nach der Zeit genommenen Differential-Quotienten mit Strichen bezeichnet. Indem wir, wie schon bemerkt, U als reine Funktion von r ansehen, können wir die Differentialgleichungen der Bewegung in der zweiten Lagrange'schen Form ableiten. Bezeichnet man die linke Seite der letzten Gleichung mit T und versteht unter γ jede der abhängigen Veränderlichen, so hat man zu bilden:

$$\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial \gamma'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} = \frac{\partial U}{\partial \gamma}$$

Man erhält:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha r'' - \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r+g_\alpha)\vartheta'^2 = \frac{dU}{dr}$$

$$\frac{d}{dt}\{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r+g_\alpha)^2 \vartheta'\} = o.$$

Dieses System Differentialgleichungen ist ein System der vierten Ordnung. Zur Auflösung gehören somit vier Integrale, von denen jedes eine willkürliche Constante erfordert.

Die linke Seite der letzten Gleichung ist ein vollständiger Differential-Quotient, man kann daher auf beiden Seiten mit dt multiplicieren und integrieren. So erhält man den Flächensatz:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r+g_\alpha)^2 \vartheta' = D.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\vartheta'^2 = \frac{D^2}{\left(\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r+g_\alpha)^2\right)^2}$$

Setzt man diesen Ausdruck für ϑ'^2 in die Gleichung der lebendigen Kraft ein, so erhält man:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha r'^2 + \frac{D^2}{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r+g_\alpha)^2} = 2U+2H$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha}\left\{2U+2H - \frac{D^2}{\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha (r+g_\alpha)^2}\right\}}$$

Setzt man $\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha = L$, so erhält man die folgende Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen dem Radius vector r und der Zeit gibt:

$$t = \int \frac{\sqrt{L}\ dr}{\sqrt{2U+2H - \frac{D^2}{\sum_{1}^{n} m_\alpha (r+g_\mathfrak{b})^2}}} + E.$$

Führt man den Wert von dt in den aus dem Flächensatze sich ergebenden Ausdruck für $d\vartheta$

$$d\vartheta = \frac{Ddt}{\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2}$$

ein, so ergibt sich durch Integration:

$$\vartheta = \int \frac{D\sqrt{L}\ \ dr}{\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2 \sqrt{2U+2H-\frac{D^2}{\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2}}} + F.$$

Die Gleichungen für t und ϑ sind die beiden noch fehlenden Integrale.

Die Daten des Problems, welche einen Anfangszustand vollständig bestimmen, sind die folgenden:

Zur Zeit $t = t_0$ ist:

$$r = r_0 \qquad \vartheta = \vartheta_0$$
$$r' = r'_0 \qquad \vartheta' = \vartheta'_0$$

Die gefundenen vier Integrale, welche die vollständige Lösung des Problems enthalten, lassen sich immer aufstellen, wie immer U von der Entfernung der Massenpunkte vom Nullpunkt abhängt. Die Bestimmung der auftretenden Constanten ergibt sich, wenn die Integrationen von t_0 bis zu irgend einer Zeit t ausgedehnt werden, wobei r von r_0 bis r, ϑ von ϑ_0 bis ϑ gehen muss.

Man erhält:

$$\tfrac{1}{2}(Lr_0'^2 + \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha (r_0+g_\alpha)^2 \vartheta_0'^2) - U_0 = H$$

$$\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha (r_0+g_\alpha)^2 \vartheta'_0 \qquad = D$$

Die Bestimmung von E und F würde die Ausführung von zwei Quadraturen erfordern. Zur vollständigen Lösung würden alsdann noch swei Umkehrungsgeschäfte anszuführen sein, durch welche die beiden abhängigen Veränderlichen r und ϑ als Funktionen der Zeit dargestellt werden könnten.

§. 3.

Indem wir für U setzen $\varphi(r)$, können wir das Integral, welches den Zusammenhang zwischen t und r gibt, schreiben:

$$t = \sqrt{L} \int \frac{dr}{\sqrt{2(\varphi(r)+H) - \frac{D^2}{m_1 r^2 + m_2(r+g_2) + \ldots + m_n(r+g_n)^2}}} + E$$

L ist eine ihrer Natur nach positive Grösse und man hat ebenfalls $\sqrt{L}$ als positiv zu betrachten. Es muss ausserdem die Grösse unter dem Wurzelzeichen im Nenner stets positiv sein, da bei den mechanischen Problemen die Variable t durchaus reell sein muss. Es wird daher stets die Ungleichheit:

$$2(\varphi(r) + H) > \frac{D^2}{\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2}$$

bestehen müssen, eine Bedingung, welche über das Vorhandensein der Stabilität der Bewegung eine Entscheidung möglich machen wird.

Durch eine Umformung geht das Integral über in:

$$\int \frac{\sqrt{\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2}}{\sqrt{2(\varphi(r)+H)(\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2) - D^2}} dr$$

Um dieses Integral weiter reducieren zu können, müssen wir die Funktion $\varphi(r)$ näher bestimmen. Wir wollen die Kräftefunktion nur in soweit spezialisieren, dass wir festsetzen, sie sei von folgender Gestalt:

$$\varphi(r) = k(m_1 r^s + m_2(r+g_2)^s + m_3(r+g_3)^s + \ldots + m_n(r+g_n)^s)$$

oder: $$k \sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^s,$$

wobei k eine positive oder negative Constante bedeutet und s eine ganze Zahl ist.

Es sollen hierbei die drei Fälle unterschieden werden, dass s positiv, null oder negativ ist.

Wird zunächst die Funktion zweiten Grades

$$\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2$$

nach Potenzen von r geordnet, so erhält man:

$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)r^2+2(m_2g_2+m_3g_3+\ldots+m_ng_n)r+ m_2g_2^2+m_3g_3^2+\ldots+m_ng^2_n$$

Der Faktor von r^2 ist L, nennt man $2M$ den Faktor von r und das von r freie Aggregat von Gliedern N, so erhält man:

$$\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^2 = Lr^2+2Mr+N$$

und das Integral bekommt die Gestalt:

$$\int \frac{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}}{\sqrt{2(k\sum_1^n m_\alpha (r+g_\alpha)^s + H)(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}\, dr$$

Ist nun, wie für den ersten Fall vorausgesetzt,

$$s > o,$$

so tritt, nachdem man den Zähler rational gemacht hat, im Nenner unter der Wurzel als höchste Potenz von r die $(s+4)$te auf, sodass für den kleinsten Wert von s jenes Wurzelzeichen die 5te Potenz enthält. Der zweite Fall, dass

$$s = o$$

wird, hat die mechanische Bedeutung, dass keine anziehende Kraft auf das System wirkt; die lebendige Kraft bleibt bei der ganzen Bewegung dieselbe wie zu Anfang also gleich der Constante $2H$, so dass das Integral das folgende wird:

$$\int \frac{Lr^2+2Mr+N}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\,\sqrt{2H(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}\, dr$$

Dieses Integral soll später einer nähern Untersuchng unterzogen werden. Dasselbe wird sich mittelst elliptischer Integrale erster und zweiter Gattung darstellen lassen.

Wir kommen jetzt zu dem dritten Fall, dass nämlich

$$s < o$$

ist. Setzen wir $s = -q$, so erhält die Kräftefunktion die Gestalt:

$$k\left\{\frac{m_1}{r^q} + \frac{m_2}{(r+g_2)^q} + \ldots + \frac{m_n}{(r+g_n)^q}\right\}$$

$$= k\frac{m_1\{(r+g_2)\ldots(r+g_n)\}^q + \ldots + m_n\{r(r+g_2)\ldots(r+g_{n-1})\}^q}{\{r(r+g_2)(r+g_3)\ldots(r+g_n)\}^q}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist vom Grade nq, jeder Ausdruck im Zähler, welcher in eine besondere Masse multipliciert ist, vom $(n-1)q$ten Grade. Bezeichnen wir der Kürze halber den Zähler mit $Q(r)$, den Nenner mit $P(r)$, so wird

$$P(r) = (r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r)^q,$$

wobei $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ die symmetrischen Verbindungen der Grössen g sind, so dass

$$\begin{aligned} A_1 &= g_2 + g_3 + \ldots + g_n \\ A_2 &= g_2 g_3 + g_2 g_4 + \ldots + g_{n-1} g_n \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= g_2 g_3 \ldots g_n \end{aligned}$$

ist.

Das Integral, welches jetzt in der Gestalt

$$\int \frac{\sqrt{P(r)(Lr^2 + 2Mr + N)}}{\sqrt{2(kQ(r) + HP(r))(Lr^2 + 2Mr + N) - D^2 P(r)}}\, dr$$

erscheint, enthält im Nenner unter dem Wurzelzeichen eine Funktion nqten Grades multipliciert in eine Funktion zweiten Grades, im Zähler findet ganz dasselbe statt. Nimmt q den geringsten Wert 1 an und besteht das System nur aus zwei Punkten, so dass $n = 2$ ist, so enthält der Zähler sowohl als der Nenner den vierten Grad unter der Wurzel. Dieser letzte Fall würde eintreten, wenn die anziehende oder abstossende Kraft, nach dem Newtonschen Gesetze wirkte. Für diesen einfachsten Fall würde das Integral im allgemeinen ein hyperelliptisches Integral. Hiermit sind alle Kräftefunktionen erschöpft, welche entstehen, wenn die Kraft einer ganzen Potenz der Entfernung der Punkte vom

Centrum und der Masse proportional wirkt mit Ausnahme des einen Falles, dass die Kraft der Entfernung umgekehrt proportional ist. In diesem Falle wird die Kraft durch den Ausdruck dargestellt:

$$k\sum_1^n \frac{m_\alpha}{r+g_\alpha}$$

und die Kräftefunktion wird:

$$k\sum_1^n \log(r+g_\alpha)^{m_\alpha} \quad \text{oder} \quad k\log\prod_1^n(r+g_\alpha)^{m_\alpha}$$

Das besprochene Integral wird:

$$\int\frac{Lr^2+2Mr+N}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\sqrt{2(k\log\prod_1^n(r+g_\alpha)^{m_\alpha}+H)(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}\,dr$$

Wir gehen nunmehr zur Besprechung des letzten der Integrale für die genannten drei Fälle über:

Wird zunächst wieder die Kräftefunktion ein Ausdruck

$$k\sum m_\alpha(r+g_\alpha)^s,$$

wobei s eine positive Zahl ist, so gewinnt das Integral die Gestalt:

$$\vartheta=D\sqrt{L}\int\frac{dr}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\sqrt{2(k\sum m_\alpha(r+g_\alpha)^s+H)(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}+F$$

Bei diesem Integral erhält man unter der Quadratwurzel eine Funktion $(s+4)$ ten Grades. Wenn nun, wie der zweite Fall verlangt, s den Wert Null annimmt, so wird dieses Integral das folgende:

$$D\sqrt{L}\int\frac{dr}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\sqrt{2H(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}$$

$2H$ bedeutet hier die ganze anfängliche lebendige Kraft. Man hat es offenbar mit einem elliptischen Integral der ersten Gattung zu thun; wir werden dasselbe später auf seine Normalform bringen und jetzt den Fall ins Auge

fassen, wo s eine ganze negative Zahl ist. Wir erhalten, wenn wieder $s = -q$ gesetzt wird, das Integral:

$$D\sqrt{L}\int\frac{\sqrt{P(r)}\;dr}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\sqrt{2(kQ(r)+HP(r))(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}$$

wobei $P(r)$ und $Q(r)$ ihre frühere Bedeutung beibehalten. Im Allgemeinen ist $P(r)$ eine Funktion nqten Grades, während der Grad von $Q(r)$ um q Einheiten niedriger liegt. Nimmt s seinen geringsten Wert an, was, wie bemerkt, eintritt, wenn die Centralkraft nach dem Newtonschen Gesetz wirkt, so wird, nachdem der Zähler rational gemacht worden ist, im Nenner unter der Wurzel als höchste Potenz von r die $(2n+4)$te auftreten. Im Zähler findet sich alsdann ein Aggregat, welches alle Potenzen von r von der $n$ten abwärts bis zur ersten enthält.

In dem Falle, wo die Kraft der Entfernung vom Centrum umgekehrt proportional wirkt, erhält das Integral die besondere Gestalt:

$$D\sqrt{L}\int\frac{dr}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\sqrt{2(k\log\prod_1^n(r+g_\alpha)^{m_\alpha}+H)(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}$$

Die beiden jetzt betrachteten Arten von Integralen lassen sich, wie sich gezeigt hat, nicht durch algebraische Funktionen, Kreisfunktionen oder Logarithmen ausdrücken, indem dieselben in allen Fällen unter der Quadratwurzel im Nenner die Variable mindestens in der vierten Potenz enthalten. Für die verschiedenen Kräftefunktionen, welche Funktionen einer positiven oder negativen Potenz von r sind, zeigen die Integrale einen wesentlichen Unterschied. Ist bei der Kräftefunktion

$$k\sum_1^n m_\alpha(r+g_\alpha)^s$$

s positiv, so wird der Grad des Ausdrucks unter der Wurzel im Nenner nicht geändert, wenn die Anzahl der angezogenen

Massenpunkte grösser oder geringer angenommen wird, in dem andern Falle, wo s negativ ist, hat die Grösse der Zahl n Einfluss auf die Zahl, welche den Grad jenes Ausdrucks angibt.

§. 4.

Über die Art der Bewegung lassen sich einige allgemeine Bemerkungen machen.

Zunächst hat sich ergeben, dass die Bahnen der Punkte nur ebene krumme Linien sein können. Ferner ergibt sich sofort aus der Betrachtung der Gleichung

$$(Lr^2+2Mr+N)\frac{d\vartheta}{dt}=D$$

dass die Drehungsbewegung immer in dem einmal begonnenen Sinne fortschreitet. Ein Umkehren würde sich dadurch zu erkennen geben, dass $\frac{d\vartheta}{dt}$ während der Bewegung sein Vorzeichen wechseln würde. Dies ist aber in der That unmöglich, da sich für $\frac{d\vartheta}{dt}$ der Ausdruck

$$\frac{D}{Lr^2+2Mr+N}$$

ergibt, welcher in den Daten des Problems ausgedrückt lautet:

$$\frac{\sum_1^n m_a(r_0+g_a)^2\vartheta'_0}{\sum_1^n m_a(r+g_a)^2}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist stets positiv, da derselbe aus einer Summe von Quadraten besteht, welche in positive Massen multipliciert sind. Aus demselben Grunde ist auch der erste Faktor des Zählers positiv, so dass das Vorzeichen nur von dem anfänglichen Wert der Winkelgeschwindigkeit abhängt. Ein Durchgang durch die Null ist

daher bei jenem Ausdruck ausgeschlossen. Die Gleichung

$$\sum_1^n m_a (r+g_a)^2 \vartheta' = D$$

erlaubt ferner den Schluss, dass die Geschwindigkeit der Graden stets abnehmen wird, wenn die Bewegung so beschaffen ist, dass das System sich immer weiter vom Centrum entfernt und zwar so, dass die Rotation ganz aufhören muss, sobald die Entfernung r über jedes Maass gewachsen ist.

Nach dieser Betrachtung der Rotation wenden wir uns zu jener Bewegung, welche in einem Gleiten des Systems auf der Graden besteht. Diese ist entweder eine Annährung oder Entfernung der Punkte in Bezug auf das Centrum, oder ein Hin- und Herschwingen derselben. Diese Bewegung lässt sich auf zwei Ursachen zurückführen. Einmal auf die Centralkraft, welche im Anfang der Coordinaten ihren Sitz hat, dann auf die Centrifugal- oder Centripetalkraft, welche durch die Drehung hervorgerufen und dem System mitgeteilt wird. Diese letztere kann als eine Kraft betrachtet werden, welche ebenfalls von dem Centrum aus wirkt. Sind beide Kräfte abstossend, so kann offenbar keine stabile Bewegung eintreten. Die Centrifugalkraft, welche auf einen Punkt wirkt, der sich auf einem Kreise bewegen muss, wird ausgedrückt durch das Produkt des Abstandes des Mobils von dem Drehpunkt in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. In unserm Falle hat also diese Kraft den Ausdruck:

$$\sum_1^n m_a (r + g_a) \vartheta'^2 = (Lr + M) \vartheta'^2$$

Dieser Ausdruck tritt auf in der Differentialgleichung:

$$\sum_1^n m_a r'' - \sum_1^n m_a (r+g_a) \vartheta'^2 = \frac{dU}{dr}$$

oder: $$Lr'' - (Lr+M)\vartheta'^2 = \frac{dU}{dr}$$

Diese Gleichung zeigt, dass in der That in der Richtung des Radius vector nur die angegebenen beiden Kräfte wirken. Ob die Bewegung fortdauernd nach derselben Richtung geht oder ob an gewissen Stellen eine Umkehr eintritt, hängt davon ab, ob die algebraische Summe

$$(Lr+M)\vartheta'^2+\frac{dU}{dr}$$

dauernd dasselbe Vorzeichen hat oder nicht. Der Flächensatz lehrt ϑ' durch r ausdrücken. Man erhält durch Einsetzen jenes Ausdruckes in jene Differentialgleichung:

$$Lr''-\frac{(Lr+M)D^2}{(Lr^2+2Mr+N)^2}=\frac{dU}{dr}.$$

Bezeichnet man

$$\frac{1}{2}\frac{D^2}{Lr^2+2Mr+N}$$

mit V, so lässt sich die letzte Gleichung schreiben:

$$Lr''=\frac{d(U-V)}{dr}$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft nimmt die Gestalt an:

$$Lr'^2+2V=2U+2H$$

Dieser Ausdruck gibt Veranlassung für gewisse Arten von Kräften festzustellen, ob die Bewegung stabil bleibt oder nicht. Die linke Seite jener Gleichung ist stets positiv. Der zweite Term nimmt mit zunehmendem r ab und nähert sich der Null, sobald r über jedes Maass hinaus zunimmt. Ist nun U von der Gestalt

$$k\sum_1^n m_a(r+g_a)^s,\quad s>o$$

und es soll die wirkende Kraft, zu der U die Kräftefunktion ist, anziehend sein, so dass $U<o$ ist, so darf offenbar r nicht weiter wachsen, als bis der absolute Wert von U denjenigen von H erreicht hat. $H\gtrless o$ ist hierbei nicht gestattet. In allen diesen Fällen ist also r zwischen festen Grenzen gelegen; sobald der Punkt (r, ϑ) diese Grenzlage

erreicht hat, tritt eine Umkehr in der Bewegung ein und man hat es hier mit einer schwingenden Bewegung zu thun. Ist die Kraft abstossend, ihr analytischer Ausdruck und ebenso U positiv, so kann die Entfernung r über jedes Maass zunehmen. Ist endlich s negativ und gleich $-q$, so stellt sich U in den bereits angewandten Bezeichnungen dar als $k\frac{Q(r)}{P(r)}$, wobei $Q(r)$ eine Funktion von r ist, deren Grad um q Einheiten niedriger liegt als der Grad von $P(r)$. Ist nun $H < o$, was nur in dem Falle der Anziehung, d. h. wenn $k\frac{Q(r)}{P(r)} > o$ ist, stattfinden kann, so würde $2U + 2H$ bei einem stets zunehmenden r negativ werden. Es muss also in diesem Falle die Bewegung stabil bleiben. Ist aber $H \geqq o$, so ist ein unendlich werden von r nicht ausgeschlossen. Für den Fall der Abstossung ist $k\frac{Q(r)}{P(r)} < o$ und es kann für $H > o$ r unendlich gross werden; dagegen darf r niemals einen solchen Wert haben, dass der absolute Wert von U denjenigen von H übertrifft. Das Minimum von r ist der grösste reelle Wert von r, welcher der Gleichung $k\frac{Q(r)}{P(r)} = H$ genügt. Besitzt diese Gleichung keine reelle Wurzel, so fällt jene Beschränkung weg; dass $2H \leqq o$ sei, ist hierbei ausgeschlossen.

Diese Betrachtungen gelten in voller Allgemeinheit, so lange $r > o$ bleibt. Wird $r < o$, so behalten dieselben ihre Gültigkeit stets, wenn der Exponent s eine grade Zahl ist. Ist s ungrade, so hängt das Vorzeichen der Summe

$$\sum_1^n m_\alpha (r + g_\alpha)^s$$

von der Grösse der einzelnen Werte $m_1, m_2, \ldots m_n, g_1, g_2, \ldots g_n$ ab und es kann eine allgemeine Entscheidung dann nicht mehr getroffen werden. Ist dagegen das Vorzeichen von

U festgestellt, so gibt das Integral der lebendigen Kraft stets ein Mittel zur Entscheidung der Frage, ob die Bewegung stabil bleibt oder nicht.

Es mag an dieser Stelle auf die Beziehung unseres Problems zu demjenigen der Bewegung der Planeten hingewiesen werden. Der Schwerpunkt unseres bewegten Systems hat vom Centrum den Abstand:

$$\varrho = \frac{\sum_1^n m_\alpha (r + g_\alpha)}{\sum_1^n m_\alpha} = r + \frac{M}{L}$$

Führen wir nun in die Integrale die neue Variable ϱ ein, indem wir

$$r = \varrho - \frac{M}{L}$$

setzen, so erhalten wir:

$$t = \sqrt{L} \int \frac{\sqrt{L\varrho^2 - \frac{M^2}{L} + N}\; d\varrho}{\sqrt{2(U+H)\left(L\varrho^2 - \frac{M^2}{L} + N\right) - D^2}} + E$$

$$\vartheta = D\sqrt{L} \int \frac{d\varrho}{\sqrt{L\varrho^2 - \frac{M^2}{L} + N}\,\sqrt{2(U+H)\left(L\varrho^2 - \frac{M^2}{L} + N\right) - D^2}} + F$$

Man sieht sogleich, dass diese Integrale in diejenigen übergehen, welche bei dem Planeten-Problem auftreten, sobald

$$\frac{M^2}{L} - N = o$$

wird. Dies kann jedoch, wie sich zeigen wird, nur stattfinden, wenn nicht ein System von Punkten, sondern nur ein einziger Punkt betrachtet wird.

II.

§. 5.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen soll auf den Fall näher eingegangen werden, dass der Punkt, um welchen die Grade drehbar ist, keine anziehende oder abstossende Kraft auf das System ausübt. Die ganze entstehende Bewegung rührt also von der Drehung, in welche das Mobil versetzt worden ist, her.

Für diesen Fall lauten die vier Integrale in den eingeführten Bezeichnungen:

$$(1) \qquad L\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (Lr^2 + 2Mr + N)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2H$$

$$(2) \qquad (Lr^2 + 2Mr + N)\frac{d\vartheta}{dt} = D$$

$$(3) \quad t = \sqrt{L}\int\frac{(Lr^2 + 2Mr + N)\quad dr}{\sqrt{Lr^2 + 2Mr + N}\ \sqrt{2H(Lr^2 + 2Mr + N) - D^2}} + E$$

$$(4) \quad \vartheta = D\sqrt{L}\int\frac{dr}{\sqrt{Lr^2 + 2Mr + N}\sqrt{2H(Lr^2 + 2Mr + N) - D^2}} + F$$

Die Constanten H und D drücken sich sogleich in den Anfangsdaten aus:

$$H = \tfrac{1}{2}\left(L\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 + (Lr_0^2 + 2Mr_0 + N)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0^2\right)$$

$$D = (Lr_0^2 + 2Mr_0 + N)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0$$

Diese Werte hat man in die Integrale (3) und (4) eingesetzt zu denken. Unter diesen Integralzeichen treten Quadratwurzeln auf. Es ist jedoch dadurch keine Zweideutigkeit geschaffen. Das Vorzeichen jener beiden Integrale ist mit den Daten des Problems zugleich gegeben. Das Vorzeichen des Integrals (3) ist dasselbe wie dasjenige von

$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$; $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ und $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)_0$ ergeben das Zeichen von $\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_0$ und mit diesem stimmt das Vorzeichen des Integrals (4) überein.

Eine Betrachtung über die Grenzen, innerhalb deren die beiden Integrationen gestattet sind, gibt über Eigenschaften der Bewegung Aufschluss. Was (3) anlangt, so ist die unter dem Integralzeichen vorkommende Funktion $Lr^2 + 2Mr + N$ für alle Werte von r positiv, sie kann für keinen reellen Wert von r verschwinden und hat ein Minimum für $r = -\frac{M}{L}$ d. h. wenn der Schwerpunkt des Systems in den Drehpunkt fällt. Es handelt sich daher wesentlich um den Faktor $2H(Lr^2 + 2Mr + N) - D^2$. Je nachdem der Ausdruck $2H\left(\frac{M^2}{L} - N\right) + D^2$ das negative oder das positive Vorzeichen hat oder gleich null ist, verschwindet die zu betrachtende Funktion für zwei complexe Werte, für zwei verschiedene reelle Werte oder für einen reellen Wert von r. Im ersten Falle ist die Bewegung nicht stabil, es kann r jeden auch noch so grossen, reellen Wert annehmen. In dem zweiten Falle kann sich das Mobil niemals zwischen den beiden Punkten befinden, welche die Wurzeln von

$$2H(Lr^2 + Mr + N) = D^2$$

darstellen, da sonst unter dem Wurzelzeichen eine negative Grösse auftreten würde. Ist das Mobil zu Anfang so gelegen, dass es sich ausserhalb der beiden bezeichneten Punkte befindet und die anfängliche Bewegung ist auf einen der Punkte zu gerichtet, so erreicht das Mobil diesen Punkt, kehrt alsdann um und geht ins Unendliche; ist die anfängliche Bewegung die entgegengesetzte, so geht das Mobil sogleich ins Unendliche. In dem noch übrigen dritten Fall, wo nur ein reeller Wert von r den betrachteten Radikanden zu null macht, darf die Integration bis

an diesen Punkt nicht geführt werden. Es nähert sich das Mobil diesem Punkt mit zunehmender Zeit immer mehr, ohne dass es denselben in der That jemals erreicht. Ist dagegen die anfängliche Direktion die entgegengesetzte, so ist die Bewegung nicht stabil. Auf diesen Fall soll in dem nächsten § näher eingegangen werden und es werden sich die hier allgemein gewonnenen Resultate daselbst bestätigen.

Das Integral (4) würde in Verbindung mit (3) gleiche Betrachtungen über die Veränderungen von ϑ mit der Zeit zulassen; es mag jedoch die aus dem Flächensatze gewonnene Erkentnis genügen, dass die Drehung niemals umkehrt oder aufhört.

Es soll zunächst eine Transformation des Integrals (3) vorgenommen werden. Wir setzen:

$$Lr^2 + 2Mr + N = z^2$$

Dies ergibt:

$$dr = \pm \frac{z\,dz}{\sqrt{L}\sqrt{\frac{M^2}{L} - N + z^2}}$$

Man erhält somit, indem man nur das positive Vorzeichen berücksichtigt:

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{\frac{M^2}{L} - N + z^2}\,\sqrt{2\,Hz^2 - D^2}}$$

Jenes Integral ist offenbar ein elliptisches. Um dasselbe auf seine Normalform zu bringen, werden wir zunächst einige abkürzende Bezeichnungen einführen.

Die Grösse:

$$\frac{M^2}{L} - N = \frac{M^2 - NL}{L}$$

ist negativ, da der Zähler negativ ist und der Nenner, der die Summe der Massen bedeutet, positiv sein muss. Dass der Zähler eine negative Grösse sein muss, erkennt man,

wenn man für L, M, N ihre Werte wieder einsetzt und den entstehenden Ausdruck passend zusammenfasst. Man erhält:

$$M^2 - NL = \{\Sigma m_\alpha g_\alpha\}^2 - \Sigma m_\alpha g_\alpha^2 \, . \, \Sigma m_\alpha$$
$$= -\{m_2 m_3 (g_2 - g_3)^2 + m_2 m_4 (g_2 - g_4)^2 + \ldots + m_{n-1} m_n (g_{n-1} - g_n)^2$$
$$+ m_1 (m_2 g_2^2 + m_3 g_3^2 + \ldots + m_n g_n^2)\}$$

In der Klammer befindet sich eine Summe von nur positiven Grössen, so dass

$$M^2 - NL$$

sicher negativ ist.

Wir bezeichnen daher

$$\frac{M^2 - NL}{L} \text{ mit } -a^2$$

ebenso mag $2H$ mit b^2,
D^2 mit c^2

bezeichnet werden.

$2H$ ist die lebendige Kraft des Systems und daher positiv. Es ist damit die Bezeichnung b^2 für $2H$ gerechtfertigt. Verschwinden kann H nur in dem Falle der absoluten Ruhe. Das Integral (3) erhält somit die Gestalt:

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)(b^2 z^2 - c^2)}}$$

Das Intervall, innerhalb dessen sich z bewegen darf, ist entweder von a oder von $\frac{c}{b}$ bis zu einem beliebig grossen Wert auszudehnen. Wie dies mit den vorhergegangenen Erörterungen über die Ausdehnung des Intervalls von r übereinstimmt, ersieht man, wenn man z wieder durch den ihm gleichen Ausdruck in r ersetzt.

Im Nenner des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks sondern wir ac als Faktor ab und erhalten:

$$\int \frac{z^2 dz}{ac\sqrt{\left(\frac{z^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{b^2}{c^2} z^2 - 1\right)}}$$

Über das Recht an dieser Stelle mit a^2c^2 zu dividieren kann kein Zweifel sein. Der Ausdruck für a^2 kann nur verschwinden, wenn

$$g_2 = g_3 = g_4 = \ldots = g_n = o$$

ist, was durch die Natur des Problems ausgeschlossen ist. Es würde dies der Fall sein, wenn die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes betrachtet würde. Wird c^2 gleich null, so bedeutet dies, dass $\frac{d\vartheta}{dt} = o$ ist, d. h. dass ϑ einen festen Wert hat, dass also keine Drehung um den Nullpunkt stattfindet. In diesem Fall gestaltet sich das Integral einfacher und wird überhaupt nicht elliptisch.

Bei der weitern Transformation unterscheiden wir, ob $\frac{a^2b^2}{c^2}$ ein echter oder unechter Bruch ist. Für den ersten Fall setzen wir:

$$z = \frac{c}{b \sin\varphi}, \quad dz = \frac{c \cos\varphi}{b \sin^2\varphi} d\varphi$$

Der zu transformierende Ausdruck wird:

$$\frac{c \cos\varphi \, d\varphi}{ab^3 \sin^4\varphi \sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2b^2 \sin^2\varphi} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 1\right)}}$$

so dass nach Ausführung der Reduktionen das Integral das folgende wird:

$$\frac{c}{b^2} \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \sqrt{1 - \frac{a^2b^2}{c^2} \sin^2\varphi}}$$

In dem andern Falle, wo

$$\frac{a^2b^2}{c^2} > 1$$

ist, setzen wir:

$$z = \frac{a}{\sin\varphi}, \quad dz = \frac{a \cos\varphi}{\sin^2\varphi} d\varphi$$

Mit Benutzung dieser Substitutionen erhält man:

$$\frac{a}{b}\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2b^2}\sin^2\varphi}}$$

Die Substitution der neuen Variable φ zeigt sogleich, dass für die oben angeführten Grenzen von z hier die completen elliptischen Integrale entstehen, indem sich bei beiden Substitutionen für $z=\infty$, $\varphi=o$, bei der ersteren für $z=\frac{c}{b}$, bei der zweiten für $z=a$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ergibt. Denkt man sich für den echten Bruch $\frac{a^2b^2}{c^2}$ resp. $\frac{c^2}{a^2b^2}$ das Zeichen k^2 gesetzt, so hat man ein Integral von der Form

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

zu betrachten. Statt dieses Integrals schreiben wir:

$$\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Nun ist:

$$\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=-\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$$

Man erhält somit durch Integration nach Teilen:

$$\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$-\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}\cos\varphi-\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

Es ist also:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}= \tag{5}$$

$$-\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}\cos\varphi-\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Man erhält also nach der Bezeichnungsweise von Legendre ausser einem algebraischen Teil ein elliptisches Integral

zweiter und ein solches erster Gattung. Durch die Substitution

$$\sin\varphi = y$$

erhält man sogleich:

$$\int \frac{dy}{y^2\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} =$$

$$-\frac{\sqrt{1-k^2y^2}\sqrt{1-y^2}}{y} + k^2\int\frac{y^2dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

Somit zerlegt sich das Integral in einen algebraischen Teil und ein einziges elliptisches Integral zweiter Gattung, wenn man sich der Bezeichnungsweise von Abel [1]) bedient.

Wir gehen jetzt dazu über das Integral (4) auf die kanonische Form zu bringen.

Wir wenden zunächst dieselbe Substitution an wie bei (3) und erhalten:

$$D\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{M^2}{L} - N + z^2}\sqrt{2Hz^2 - D^2}} \qquad \text{oder}$$

$$c\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-a^2}\sqrt{b^2z^2-c^2}}$$

Durch dieselben Transformationen wie früher gelangen wir durch die Substitutionen:

$$z = \frac{c}{b\sin\varphi} \quad \text{oder} \quad z = \frac{a}{\sin\varphi},$$

je nachdem $\frac{a^2b^2}{c^2}$ kleiner oder grösser wie die Einheit ist, resp. zu den Integralen:

$$(6) \qquad \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2b^2}{c^2}\sin^2\varphi}}, \quad \frac{c}{ab}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2b^2}\sin^2\varphi}}$$

Dieses Integral, welches r als Funktion von ϑ enthält, liefert durch Umkehrung die Bahncurve, welche der Punkt

1) Crelle, Journal. Bd. IV p. 286.

mit den Coordinaten (r, ϑ) bei seiner Bewegung beschreibt, durch welche dann die Bahnen der übrigen ($n-1$) Punkte mitbestimmt werden. Um diese Umkehrung vornehmen zu können, müssen wir zunächst die Grenzen des Integrals ins Auge fassen. Die Grenzen der Integrale (5) und (6) sind dieselben. Ursprünglich gingen dieselben von r_0 bis r, wobei r einen über r_0 liegenden Wert bedeutet, den der Radius vector zu einer beliebigen Zeit t annimmt. Durch die erste eingeführte Substitution gehen die Grenzen beziehungsweise über in z_0 und z, wo

$$z_0 = \sqrt{Lr_0^2 + 2Mr_0 + N}, \qquad z = \sqrt{Lr^2 + Mr + N}$$

ist. Bei der zweiten Substitution erhält man als Grenzen:

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{c}{b\sqrt{Lr_0^2 + 2Mr_0 + N}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{c}{b\sqrt{Lr^2 + 2Mr + N}}$$

oder, wenn $\frac{a^2 b^2}{c^2} > 1$ ist:

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{a}{\sqrt{Lr_0^2 + 2Mr_0 + N}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{a}{\sqrt{Lr^2 + 2Mr + N}}$$

In diesen Grenzen sind die Integrale (5) und (6) zu nehmen.

Wir zerlegen nunmehr das in den Grenzen von φ_0 bis φ sich erstreckende Integral (6) in die Differenz zweier Integrale, von denen das erste von o bis φ, das zweite von o bis φ_0 geht. Wendet man dann das Theorem an, nach welchem ein elliptisches Integral erster Gattung von einem andern derselben Gattung und demselben Modul abgezogen wird, so erhält man ein neues Integral, welches denselben Modul hat, und dessen untere Grenze o ist, dessen obere η sein mag; diese Grösse η hängt mit den früheren Grenzen φ_0 und φ zusammen durch die Gleichung:

$$\sin\eta = \frac{\sin\varphi\cos\varphi_0\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi_0} - \cos\varphi\sin\varphi_0\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_0}$$

Man erhält somit [1]):

1) cf. Jacobi, Fundam. nova theor. funct. ell. p. 70.

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_0^{\eta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

oder:
$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{c}{ab} \int_0^{\eta_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

η und η_1 sind die Werte der obern Grenze je nachdem der Modul $\frac{ab}{c}$ oder $\frac{c}{ab}$ ist.

Im Folgenden mag nur noch der Modul $\frac{ab}{c}$ betrachtet werden, und das Zeichen k für denselben eintreten, indem sich leicht alle Rechnungen auf den reciproken Modul übertragen lassen.

Die zuletzt erhaltene Gleichung gibt durch Umkehrung die Gleichung der Bahncurve in Polarcoordinaten:

$$\eta = am\,(\vartheta - \vartheta_0)$$

Da nun nach einer Formel aus der Theorie der elliptischen Funktionen $\sin\varphi$ sich als Funktion von η also auch von ϑ darstellen lässt, so kann r als Funktion des Drehungswinkels angegeben werden, wodurch dann die Curve vollständig gegeben wird.

Es ist:

$$\sin\varphi = \frac{\sin\varphi_0\, cn(\vartheta - \vartheta_0) dn(\vartheta - \vartheta_0) + sn(\vartheta - \vartheta_0) \cos\varphi_0 \Delta(\varphi_0)}{1 - k^2 \sin^2\varphi_0\, sn^2(\vartheta - \vartheta_0)}$$

Nennen wir der Kürze halber diese Funktion von ϑ $g(\vartheta)$, so ist:

$$\sin\varphi = g(\vartheta), \quad \frac{c}{b\sqrt{Lr^2 + 2Mr + N}} = g(\vartheta)$$

somit:
$$r = -\frac{M}{L} \pm \sqrt{\frac{M^2}{L^2} - \frac{N}{L} + \frac{c^2}{Lb^2 g^2(\vartheta)}}$$

also:

$$r + \frac{M}{L} = \pm \frac{1}{L\sqrt{2H}\, g(\vartheta)} \sqrt{2H(M^2 - LN) g^2(\vartheta) + LD^2}$$

Da nun $r+\frac{M}{L}$ der Radius vector des Schwerpunktes ist, so gibt jene Gleichung die Trajektorie dieses Punktes. Diese Curve wird offenbar von complicierter Natur sein, da ihre Gleichung in keineswegs einfacher Weise von elliptischen Transcendenten abhängig ist. Es ist hierbei der Drehungswinkel ϑ als unabhängige Variable gewählt worden und deshalb wird es nöthig sein die Zeit ebenfalls in Abhängigkeit von diesem Winkel darzustellen.

Es war die Gleichung gefunden:

$$b^2\frac{t-t_0}{c}=\left[-\frac{\cos\varphi\,\varDelta(\varphi)}{\sin\varphi}\right]_{\varphi_0}^{\varphi}-\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\varDelta(\varphi)d\varphi+\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)},$$

wobei $\varDelta(\varphi)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ ist.

Um eine Transformation vornehmen zu können, müssen zunächst die Integrale die untere Grenze o erhalten. Durch Anwendung des Subtraktionstheorems erhält man mittelst des bereits eingeführten Winkels η:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\varDelta(\varphi)\,d\varphi=\int\limits_{o}^{\eta}\varDelta(\varphi)d\varphi-k^2\sin\varphi_0\sin\varphi\sin\eta$$

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)}=\int\limits_{o}^{\eta}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)}$$

Dieses letztere Integral ist $\vartheta-\vartheta_0$ selbst. Um das Integral zweiter Gattung als Funktion von ϑ darzustellen, bedienen wir uns der von Jacobi in die Analysis eingeführten ϑ-Reihen. Indem wir uns ganz an die Bezeichnungsweise von Jacobi [1]) anschliessen, finden wir:

$$\int\limits_{o}^{\eta}\varDelta(\varphi)\,d\varphi=-\frac{\pi}{2K}(\zeta'(o)x-\zeta(x))+\int\limits_{o}^{\eta}\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)}$$

1) Jacobis Werke I, 19 p. 497—538. Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Theta-Reihen abgeleitet. Ausgearbeitet von C. W. Borchardt.

Die Bedeutung dieser Zeichen ist die folgende:

Die Constante K ist das vollständige Integral erster Gattung $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$. Dasselbe hängt bloss von dem Modul ab und kann, da derselbe zwischen 0 und 1 gelegen ist, stets in eine convergente Reihe entwickelt werden. Die Variable x hängt mit ϑ so zusammen, dass:

$$x = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_3^2(o)}$$

ist. $\vartheta_3(o)$ is die folgende Reihe:

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots + 2q^{n^2} + \ldots$$

Die Constante q ist gleich:

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

wobei K' das vollständige Integral erster Gattung mit dem complementären Modul:

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

ist, so dass q nur von dem Modul abhängig ist. x ist somit der Differenz $(\vartheta - \vartheta_0)$ proportional. Aus den erklärten Elementen x und q setzt sich die Reihe $\vartheta(x)$ so zusammen, dass:

$$\vartheta(x) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x \pm \ldots + (-1)^n 2q^{n^2} \cos 2nx + \ldots$$

ist. Die Grössen $\zeta'(o)$ und $\zeta(x)$ stehen mit dieser Reihe im genauesten Zusammenhange: $\zeta'(o)$ bedeutet $\frac{d^2 \log \vartheta(x)}{dx^2}$, wobei nach ausgeführter Differentiation x durch o zu ersetzen ist.

$$\zeta(x) \text{ bedeutet } \frac{d \log \vartheta(x)}{dx}$$

Fügen wir noch die Formeln hinzu, welche $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$ als Funktionen von η geben und ersetzen sogleich in denselben $\sin\eta$, $\cos\eta$, $\Delta(\eta)$ durch $sn(\vartheta - \vartheta_0)$, $cn(\vartheta - \vartheta_0)$, $dn(\vartheta - \vartheta_0)$, so erhalten wir:

$$\sin\varphi = g(\vartheta)$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi_0 cn(\vartheta-\vartheta_0) - \sin\varphi_0 sn(\vartheta-\vartheta_0)\Delta(\varphi_0) dn(\vartheta-\vartheta_0)}{1-k^2\sin^2\varphi_0 sn^2(\vartheta-\vartheta_0)} = q(\vartheta)$$

$$\Delta(\varphi) = \frac{\Delta(\varphi_0) dn(\vartheta-\vartheta_0) - k^2 \sin\varphi_0 sn(\vartheta-\vartheta_0) cn(\vartheta-\vartheta_0)\cos\varphi_0}{1-k^2\sin^2\varphi_0 sn^2(\vartheta-\vartheta_0)} = p(\vartheta)$$

Da ausserdem:

$$\sin\varphi_0 = \frac{c}{b\sqrt{Lr_0^2+2Mr_0+N}}$$

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{b^2(Lr_0^2+2Mr_0^2+N)-c^2}{b^2(Lr_0^2+2Mr_0+N)}}$$

$$\Delta(\varphi_0) = \sqrt{\frac{(Lr_0^2+2Mr_0+N)-a^2}{Lr_0^2+2Mr_0+N}}$$

ist, so sind wir nunmehr im Stande t ganz durch die Variable ϑ und die gegebenen Constanten auszudrücken. Man erhält:

$$t = t_0 - \frac{D}{2H}\Bigg\{ \frac{1}{D}\sqrt{(2H(Lr_0^2+2Mr_0+N)-D^2)\left(Lr_0^2+2Mr_0+\frac{M^2}{L}\right)}$$
$$- \frac{q(\vartheta)p(\vartheta)}{g(\vartheta)} + \frac{(M^2-LN)\sqrt{2H}g(\vartheta)sn(\vartheta-\vartheta_0)}{LD\sqrt{Lr_0^2+2Mr_0+N}}$$
$$- \frac{\pi}{2K}\left(\zeta'(o)\frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta_3^2(o)} - \zeta\left(\frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta_3^2(o)}\right)\right)\Bigg\}$$

§. 6.

Um ein Bild von dieser Bewegung zu erhalten, wollen wir einen speziellen Fall betrachten. Man kann zwischen den Constanten H und D, welche allein vom Anfangszustande abhängen und den für jede Lage und Geschwindigkeit gleichen Constanten L, M, N eine Relation so annehmen, dass die Integrale (3) und (4) die Eigenschaft elliptische Integrale zu sein verlieren, ohne dass dadurch die fortschreitende oder die rotierende Bewegung aufgehoben wird. Wir denken uns den Anfangszustand so eingerichtet, dass:

$$2H\left(N-\frac{M^2}{L}\right)=D^2 \qquad \text{ist.}$$

Damit diese Gleichung algebraisch bestehen könne, müssen nothwendig die beiden Faktoren auf der linken Seite dasselbe Vorzeichen haben. Es ist aber nachgewiesen, dass H stets positiv ist, ebenso dass $\frac{M^2}{L}-N$ immer einen negativen Wert hat. Es wird daher jenes Produkt positiv.

In dem Integral (4) führen wir jetzt als neue Veränderliche für r die Grösse

$$\zeta-\frac{M}{L}$$

ein, dabei wird

$$dr=d\zeta$$

und unter Berücksichtigung der angegebenen Relation geht das Integral (4) in das folgende über:

$$\vartheta-\vartheta_0=\frac{D}{\sqrt{2H}}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{L\zeta^2+a^2}}$$

$$\zeta_0>o$$

a^2 hat die frühere Bedeutung:

$$-\frac{M^2}{L}-N$$

$$\zeta_0=r_0+\frac{M}{L}$$

$$\zeta=r+\frac{M}{L}$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$\vartheta-\vartheta_0=\frac{D}{2a\sqrt{2H}}\left[\log\frac{\sqrt{L\zeta^2+a^2}-a}{\sqrt{L\zeta^2+a^2}+a}\right]_{\zeta_0}^{\zeta}$$

Bezeichnen wir für den Augenblick den Ausdruck

$$\sqrt{L\zeta^2+a^2}$$

mit W und für $\zeta=\zeta_0$ mit W_0, so erhalten wir:

$$2(\vartheta-\vartheta_0)+\log\frac{W_0-a}{W_0+a}=\log\frac{W-a}{W+a}$$

indem nach der bestehenden Gleichung

$$\frac{D}{a\sqrt{2H}} = 1 \qquad \text{ist.}$$

Geht man vom Logarithmus zum Numerus über, indem man jede Seite der Gleichung der Basis e zum Exponenten schreibt, so kommt:

$$e^{2(\vartheta-\vartheta)+\log\frac{W_0-a}{W_0+a}} = \frac{W-a}{W+a}$$

Den Exponenten

$$2(\vartheta-\vartheta_0)+\log\frac{W_0+a}{W_0-a}$$

nennen wir τ und erhalten weiter:

$$e^{\tau}(W+a) = W-a,$$

somit:

$$W = -\frac{a(e^{\tau}+1)}{e^{\tau}-1}$$

Daraus folgt:

$$\zeta^2 = \frac{4a^2}{L}\,\frac{e^{\tau}}{(e^{\tau}-1)^2}$$

somit ist:

$$\zeta = \frac{2a}{\sqrt{L}}\,\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\tau}-e^{-\frac{1}{2}\tau}}$$

Diese Gleichung gibt die Bahncurve, welche der Punkt mit den Coordinaten (ζ, ϑ) bei seiner Bewegung beschreibt. (Denkt man sich für τ seinen Wert wieder eingesetzt und man setzt alsdann $\vartheta = \vartheta_0$, so wird $\zeta = \zeta_0$, was als Verifikation der Rechnung dienen kann.) Es ist bereits früher gezeigt worden, dass $r + \frac{M}{L}$ die Entfernung des Schwerpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten ist, so dass wir in jener Gleichung die Bahn des Schwerpunktes dargestellt haben.

Der Nenner

$$e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}$$

ist für alle Werte von ϑ positiv, so lange ϑ zunimmt. Während dieser Zunahme wird der Nenner grösser, es nimmt daher ζ ab, da der Zähler constant ist. Man hat es offenbar mit der Gleichung einer Spirale zu thun. Der Schwerpunkt kann sich auf dieser nach zwei Richtungen bewegen, indem er sich entweder von seiner Anfangslage aus dem Nullpunkt nähert, oder sich von demselben entfernt. Nach welcher Richtung er geht, hängt ganz von der anfänglichen Richtung seiner Geschwindigkeit ab. Analytisch wird dies durch das Vorzeichen von $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ bestimmt.

Um die ausgezeichneten Punkte zu finden, welche die Curve besitzt, bilden wir den Ausdruck, welcher die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Tangente an die Curve und der Axe gibt, von welcher aus der Winkel ϑ gezählt wird:

$$\frac{\frac{d\zeta}{d\vartheta}\sin\vartheta + \zeta\cos\vartheta}{\frac{d\zeta}{d\vartheta}\cos\vartheta - \zeta\sin\vartheta} = \frac{-\left(e^{\frac{1}{2}\tau} + e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)\sin\vartheta + \left(e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)\cos\vartheta}{-\left(e^{\frac{1}{2}\tau} + e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)\cos\vartheta - \left(e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)\sin\vartheta}$$

So oft dieser Ausdruck verschwindet, wird die Tangente jener Axe parallel und es treten Culminationspunkte ein. Es ist dies der Fall für jedes ϑ, welches der Gleichung genügt:

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}}{e^{\frac{1}{2}\tau} + e^{-\frac{1}{2}\tau}}$$

Um die Frage zu beantworten, ob die Curve eine Asymptote besitzt, müssen wir zusehen, ob ζ unendlich gross werden kann. Es muss alsdann:

$$e^{\frac{1}{2}\tau} = e^{-\frac{1}{2}\tau}$$

oder $\tau = o$ werden. Dies tritt ein, wenn

$$\vartheta = \vartheta_0 - \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{L\zeta_0^2 + a^2} - a}{\sqrt{L\zeta^2 + a^2} + a}$$

ist. Für diesen Wert von ϑ bilden wir die Polarsubtangente d. h. die Länge der Senkrechten, die im Anfangspunkt auf dem zu jenem ϑ gehörigen Radius vector errichtet wird, vom Anfangspunkt bis zu dem Schnittpunkte mit der Tangente gerechnet, welche in dem Endpunkte jenes Radius vector angelegt wird. Die Polarsubtangente wird allgemein dargestellt durch den Ausdruck:

$$\zeta^2 \frac{d\vartheta}{d\zeta}$$

Bildet man jenen Ausdruck und führt alsdann jenes ϑ ein, welches

$$e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}$$

zum Verschwinden bringt, so erhält man:

$$\frac{D}{\sqrt{2HL}}$$

Da man somit einen endlichen, reellen Ausdruck erhalten hat, so besitzt die Spirale in der That eine Asymptote, welche in dem Abstand

$$\frac{D}{\sqrt{2HL}}$$

von jenem Radius vector, welcher zu $\tau = o$ gehört, parallel zu demselben geht.

Wächst der Winkel ϑ über jedes Maass hinaus, so nähert sich ζ der Null. Es kann also nach unendlich vielen Umdrehungen der Schwerpunkt des Systems in den Anfangspunkt der Coordinaten fallen.

Die Bahn ist somit eine krumme Linie, welche aus dem Unendlichen herkommend sich unendlich oft um den Nullpunkt windet, ohne denselben in Wirklichkeit je zu erreichen.

Wir haben bis jetzt nur die Bahn des Schwerpunktes

betrachtet. Die Massenpunkte selbst sind mit diesem durch unveränderliche Verbindungslinien verknüpft. Die Bahnen derselben kann man sich also folgendermassen entstanden denken. Es sei jene Spirale, welche der Schwerpunkt bei seiner Bewegung durchläuft, construiert und es bewege sich um den Anfangspunkt eine grade Linie. Die stetige Aufeinanderfolge aller der Punkte, welche man erhält, wenn man von dem Durchschnittspunkte der Curve mit der Graden auf letzterer immer nach derselben Richtung d. h. entweder immer auf den Nullpunkt zu oder immer von demselben weg dasselbe Stück abschneidet, ist die Bahn eines der Massenpunkte. Die Polargleichungen dieser Curven für die einzelnen Massenpunkte sind der Reihe nach die folgenden:

$$r = \frac{\frac{2a}{\sqrt{L}}}{e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}} - \frac{M}{L}$$

$$r_1 = \frac{\frac{2a}{\sqrt{L}}}{e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}} - \frac{M}{L} + g_2$$

$$r_2 = \frac{\frac{2a}{\sqrt{L}}}{e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}} - \frac{M}{L} + g_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-1} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{L}}}{e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}} - \frac{M}{L} + g_n$$

Auch diese Curven sind spiralförmig gewunden, indem bei zunehmendem ϑ der Radius vector stets abnimmt. Für $\tau = o$ erhält man die Punkte, welche zu unendlich grossen Radien vectoren gehören. Untersucht man die Frage nach den Asymptoten, wie für die Bahn des Schwer-

punktes, so zeigt sich, dass auch diese Curven solche Linien besitzen und dass dieselben mit der Asymptote für die Bahn des Schwerpunktes zusammenfallen.

Es erübrigt für diesen Fall die Beziehungen zwischen den abhängigen Veränderlichen ζ und ϑ und der Zeit anzugeben. Der Flächensatz gibt:

$$(L\zeta^2 + a^2)\vartheta' = D$$

Setzen wir für ζ den Ausdruck in ϑ, so kommt:

$$\left(\frac{4a^2}{\left(e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)^2} + a^2\right)\vartheta' = D.$$

Da

$$d\vartheta = \tfrac{1}{2}d\tau$$

ist, so erhält man weiter:

$$\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\tau} + e^{-\frac{1}{2}\tau}}{e^{\frac{1}{2}\tau} - e^{-\frac{1}{2}\tau}}\right)^2 d\tau = \frac{D}{a^2}t$$

Unter dem Integralzeichen multiplicieren wir Zähler und Nenner mit $e^{\frac{1}{2}\tau}$ und erhalten auf diese Weise:

$$\int\left(\frac{e^\tau + 1}{e^\tau - 1}\right)^2 d\tau = \frac{2D}{a^2}t$$

Durch die Substitution

$$e^\tau = y, \quad d\tau = \frac{dy}{y}$$

gelangt man zu:

$$\int\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 \frac{dy}{y}$$

Entwickelt man das Quadrat und integriert über die einzelnen Bestandtheile, so kommt:

$$\log y - \frac{4}{y-1}$$

Setzt man für y wieder seinen Wert ein und geht gleichzeitig von dem unbestimmten Integral zum bestimmten über, indem man links von ϑ_0 bis ϑ, rechts von t_0 bis t integriert, so kommt:

$$\left[\tau - \frac{4}{e^\tau - 1}\right]_{\vartheta_0}^{\vartheta} = \frac{2D}{a^2}(t - t_0)$$

Setzt man statt τ wieder

$$2(\vartheta - \vartheta_0) + \log \frac{\sqrt{L\zeta_0^2 + a^2} - a}{\sqrt{L\zeta_0^2 + a^2} + a}$$

und führt die Grenzen ϑ und ϑ_0 wirklich ein, so kommt:

$$\vartheta - \vartheta_0 + \frac{L\zeta_0^2(1 - e^{2(\vartheta - \vartheta_0)})}{a((\sqrt{L\zeta_0^2 + a^2} - a)e^{2(\vartheta - \vartheta_0)} - 1)} = \frac{D}{a^2}(t - t_0)$$

Die Beziehung, welche zwischen der Zeit und dem Radius vector besteht, gibt das Integral (3). Dasselbe geht durch die eingeführte Substitution und mit Anwendung der Bezeichnung a^2 für $-\frac{M^2}{L} + N$ in das folgende über:

$$t - t_0 = \sqrt{L} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(L\zeta^2 + a^2)d\zeta}{\sqrt{L\zeta^2 + a^2}\sqrt{2H(L\zeta^2 + a^2) - D^2}}$$

Mittelst der Gleichung

$$2Ha^2 = D^2,$$

welche zwischen den Constanten bestehen soll, erhalten wir:

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2H}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{L\zeta^2 + a^2}{\zeta\sqrt{L\zeta^2 + a^2}} d\zeta$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{2H}}\left[\sqrt{L\zeta^2 + a^2} + \frac{a}{2}\log\frac{\sqrt{L\zeta^2 + a^2} - a}{\sqrt{L\zeta^2 + a^2} + a}\right]_{\zeta_0}^{\zeta}$$

und man erhält somit durch Einsetzen der Grenzen:

$$\sqrt{L\zeta^2 + a^2} - \sqrt{L\zeta_0^2 + a^2} + \frac{a}{2}\log\frac{(\sqrt{L\zeta^2 + a^2} - a)(\sqrt{L\zeta_0^2 + a^2} + a)}{(\sqrt{L\zeta_0^2 + a^2} - a)(\sqrt{L\zeta^2 + a^2} + a)}$$
$$= \sqrt{2H}(t - t_0).$$

Die beiden Relationen, welche man zwischen ζ und t einerseits und zwischen ϑ und t andererseits erhält, sind derart, dass man einen geschlossenen Ausdruck für ζ und ϑ in t nicht angeben kann. Es kann daher auch die Winkel-

geschwindigkeit und die Geschwindigkeit bei der Bewegung auf der Graden als geschlossener Ausdruck nicht abgeleitet werden. Die Gleichung, welche zwischen ϑ und t erhalten worden ist, oder einfacher die vorhergehende, welche in τ geschrieben ist, lässt folgende Schlüsse zu: Die linke Seite dieser Gleichung hat einen positiven nach τ genommenen Differential-Quotienten. Geht τ von 0 bis $+\infty$, so geht jene Funktion von τ von $-\infty$ bis $+\infty$, ist alsdann $D > o$, so tritt das unendlich werden von t bei $\tau = \infty$ ein, ist dagegen $D < o$, so wird die Zeit für $\tau = o$ unendlich gross. Das Vorzeichen von D hängt aber ab von dem anfänglichen Drehungssinn der Graden. Da nun τ und ϑ gleichzeitig wachsen und abnehmen, so werden auch bei wachsender Zeit für positives D unendlich viele Umdrehungen eintreten, bei negativem D dagegen wird ϑ sich dem pag. 39 oben angegebenen festen Grenzwerte nähern. Im ersteren Falle wird sich, wie die Gleichung zwischeu ζ und t zeigt, ζ der Null nähern, im zweiten dagegen unendlich gross werden.

In dem allgemeinen in §. 5 behandelten Falle konnte t nur für ein über jedes Maass wachsendes r unendlich werden; wenn aber r unendlich gross wird, so nähert sich, wie die Betrachtung von Integral (4) zeigt, ϑ einer festen Grenzlage.

§. 7.

Bei fast allen Problemen der Mechanik gestaltet sich die analytische Ausführung relativ am einfachsten, wenn eine Kraft angenommen wird, welche der Entfernung und der Masse der angezogenen Punkte proportional wirkt. Es sollen daher auch hier die Integrale betrachtet werden, für den Fall, dass das Centrum mit einer solchen Kraft behaftet gedacht wird.

Bedeutet p eine Constante, welche die Kraft misst die das Centrum auf einen Punkt von der Masse 1 in der Entfernung 1 ausübt, mit dem positiven Zeichen versehen, wenn die Kraft abstösst, mit dem negativen, wenn dieselbe anzieht, so stellt sich für die oben beschriebene Kraft die Kräftefunktion für unser Problem in der folgenden Weise dar:

$$\frac{p}{2}\sum_1^n m_\alpha r(r+g_\alpha)$$

oder:

$$\frac{p}{2}(Lr^2+2Mr),$$

wo wieder je nach der Richtung der Kraft das entsprechende Vorzeichen hinzuzufügen ist.

Die beiden hauptsächlichen Integrale sind nunmehr bis auf die hinzuzufügenden Constanten:

$$t=\sqrt{L}\int\frac{(Lr^2+2Mr+N)\,dr}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\,\sqrt{(p(Lr^2+2Mr)+2H)(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}$$

$$\vartheta=D\sqrt{L}\int\frac{dr}{\sqrt{Lr^2+2Mr+N}\,\sqrt{(p(Lr^2+2Mr)+2H)(Lr^2+2Mr+N)-D^2}}$$

Diese Integrale lassen sich durch Transformation auf elliptische Integrale zurückführen und es sollen in Kürze die Schritte angegeben werden, welche dazu dienen, dieselben auf die kanonische Form zu bringen.

Man setze:

$$Lr^2+2Mr+N=u$$

Das erstere Integral wird alsdann:

$$\frac{1}{2}\int\frac{udu}{\sqrt{u}\sqrt{\frac{M^2}{L}-N+u}\sqrt{pu^2+(2H-pN)u-D^2}}$$

Wir setzen wieder

$$\frac{M^2}{L}-N=-a^2$$

$$D^2=c^2$$

und $2H-pN$, wovon das Vorzeichen von vornherein nicht angegeben werden kann, gleich h und erhalten:

$$\frac{1}{2}\int\frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2u}\sqrt{pu^2+hu-c^2}}$$

Um den Ausdruck:

$$\frac{\frac{1}{2}udu}{\sqrt{u^2-a^2u}\sqrt{pu^2+hu-c^2}}$$

umzuformen, setzen wir:

$$u_1=-\frac{h}{2p}+\sqrt{\frac{h^2}{4p^2}+c^2}$$

$$u_2=-\frac{h}{2p}-\sqrt{\frac{h^2}{4p^2}+c^2}$$

$$u_3=N-\frac{M^2}{L}$$

Diese drei Grössen sind stets reell; wir nehmen an, dass dieselben ihren absoluten Werten nach folgendermassen geordnet werden:

$$u_1>u_2>u_3$$

Alsdann wenden wir die Substitution an:

$$u=\frac{u_2u_3}{u_2-(u_2-u_3)y^2}$$

wobei:

$$du=\frac{2u_2u_3(u_2-u_3)y}{(u_2-(u_2-u_3)y^2)^2}dy$$

wird. Durch Einsetzen dieser Grössen ergibt sich nach Ausführung der Reduktionen:

$$\frac{u_3}{\sqrt{u_2(u_1-u_3)}}\,\frac{dy}{\left(1-\frac{u_2-u_3}{u_2}y^2\right)\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{u_1(u_2-u_3)}{u_2(u_1-u_3)}y^2\right)}}$$

Dies ist ein elliptisches Differenzial dritter Gattung. Der Parameter

$$\frac{u_2-u_3}{u_2}$$

ist nach den gemachten Voraussetzungen ein positiver, echter Bruch. Schreiben wir für den Modul

$$\frac{u_1(u_2-u_3)}{u_2(u_1-u_3)}$$

wieder k^2, und bezeichnen den positiven echten Bruch

$$\frac{u_1-u_3}{u_1}$$

mit $\sin^2\alpha$, folglich:

$$\sqrt{\frac{u_3}{u_1}}\ \text{mit}\ \cos\alpha$$

$$\sqrt{\frac{u_3}{u_2}}\ \text{mit}\ \Delta(\alpha)$$

so wird der Parameter

$$\frac{u_2-u_3}{u_2}=k^2\sin^2\alpha$$

und der constante Faktor

$$\frac{u_3}{\sqrt{u_2(u_1-u_3)}}=\frac{\cos\alpha\,\Delta(\alpha)}{\sin\alpha}$$

Setzt man ferner

$$y=\sin\varphi,$$

so wird der zu transformierende Ausdruck die folgende Gestalt annehmen:

$$\frac{\cos\alpha\,\Delta(\alpha)}{\sin\alpha}\,\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Wird zu diesem Ausdrucke

$$-\frac{\cos\alpha\Delta(\alpha)}{\sin\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

hinzugefügt, so erhält man genau die Jacobische Normalform [1]) für das elliptische Differential dritter Gattung nämlich:

$$\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\Delta(\alpha)\sin^2\varphi d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Wir gehen nunmehr dazu über das Integral, welches den Zusammenhang zwischen ϑ und r gibt, auf die Normalform zu reducieren, um dann erst auf obiges Integral zurückzukommen. Durch Anwendung der zuletzt benutzten Substitutionen und Bezeichnungen gelangen wir zu:

$$\vartheta = \frac{c}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2u}\sqrt{pu^2+hu-c^2}}$$

und weiter zu:

$$\frac{c}{\sqrt{u_2(u_1-u_3)}}\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

Was nun die Grenzen dieser Integrale anlangt, so ist zuerst:

$$u_0 = Lr_0^2 + 2Mr_0 + N$$

die untere,

$$u = Lr^2 + Mr + N$$

die obere gewesen. Die Substitution der neuen Variable y ist so eingerichtet, dass $y = o$ wird, wenn $u = u_3$ wird; dies letztere bedeutet aber, dass der Schwerpunkt unseres Systems sich im Anfangspunkt der Coordinaten befindet, indem die Gleichung:

$$Lr^2 + 2Mr + N = -\frac{M^2}{L} + N$$

für r den Wert $-\frac{M}{L}$ liefert. Nehmen wir diese Lage als Anfangslage, so beginnen die Integrationen mit o und gehen bis y, welches sich in u folgendermassen ausdrückt:

1) cf. Jacobi, Fundam. nova th. f. ell. p. 144.

$$y = \sqrt{\frac{u_2(u_3-u)}{u(u_3-u_2)}}$$

(Die Integrale werden offenbar vollständige, wenn die Integrationen bis u_2 geführt werden.)

Um beide Integrale in der Jacobischen Normalform zu erhalten, setzen wir auch bei dem zuletzt aufgestellten

$$y = \sin\varphi$$

Die Grenzen der Integrale sind nunmehr o und φ.

Dann wird

$$\vartheta-\vartheta_0 = \frac{c}{\sqrt{u_2(u_1-u_3)}}\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\varphi = am\left(\frac{\vartheta-\vartheta_0}{c}\sqrt{u_2(u_1-u_3)}\right),$$

eine Gleichung, durch welche die Trajektorien der Massenpunkte bestimmt werden.

Es folgt somit:

$$\sqrt{\frac{u_2(u_3-u)}{u(u_3-u_2)}} = sn\left\{\frac{\vartheta-\vartheta_0}{c}\sqrt{u_2(u_1-u_3)}\right\}$$

Hieraus ergibt sich sofort, indem man nach u auflöst und für dasselbe seinen Wert in r schreibt:

$$Lr^2+2Mr+N = \frac{u_2u_3}{(u_3-u_2)sn^2\left(\frac{\vartheta-\vartheta_0}{c}\sqrt{u_2(u_1-u_3)}\right)+u_2}$$

Diese Gleichung liefert dann sogleich:

$$r+\frac{M}{L} = \pm\frac{1}{L}\sqrt{M^2-LN+\frac{Lu_2u_3}{(u_3-u_2)sn^2\left(\frac{\vartheta-\vartheta_0}{c}\sqrt{u_2(u_1-u_3)}\right)+u_2}}$$

Dieses ist die Gleichung für die Bahn des Schwerpunktes.

Es ist nun auch das zuerst betrachtete Integral dritter Gattung so umzuformen, dass t in Abhängigkeit von ϑ erscheint. Wir bemerken zunächst, dass

$$\frac{\cos\alpha\Delta(\alpha)}{\sin\alpha}\int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\vartheta-\vartheta_0}{c}u_3$$

ist. Es ist somit:

$$t=t_0+\int\limits_0^\varphi\frac{k^2\sin\alpha\,\cos\alpha\Delta(\alpha)\sin^2\varphi d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\,\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{\vartheta-\vartheta_0}{c}u_3$$

Nach Jacobis [1]) Untersuchungen lässt sich jenes Integral in folgender Weise durch ϑ-Reihen darstellen.

Bezeichnen wir dasselbe nach Jacobis Vorgang mit $\Pi(\varphi, \alpha)$, so erhalten wir:

$$\Pi(\varphi, \alpha)=x\zeta(a)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)}$$

Die Charakteristiken ζ und ϑ haben die bereits in §. 5 angegebenen Bedeutungen:

$$x=\frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta_3{}^2(o)}\,\frac{\sqrt{u_2(u_1-u_3)}}{c}$$

$\zeta(a)$ bedeutet $\dfrac{d\log(\vartheta(x))}{dx}$, wobei nach ausgeführter Differentiation für x die Constante a zu setzen ist. Diese Constante hängt von α und dem Modul in der Weise ab, dass

$$a=\frac{\pi}{2K}\int\limits_0^\alpha\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\qquad\text{ist.}$$

Werden den angegebenen Zeichen diese Bedeutungen beigelegt, so ergibt sich die Zeit als Funktion des Drehungswinkels wie folgt:

$$t=t_0+x\zeta(a)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)}+\frac{\vartheta-\vartheta_0}{c}u_3$$

---

1) cf. Jacobis Werke l. c. p. 530.

Lebenslauf.

Am 1. Februar 1861 wurde ich, Ludwig Sonnenburg, katholischer Confession, in Bonn geboren, wo meine Eltern, der Gymnasial-Oberlehrer Ludwig Sonnenburg und Elisabeth geb. Brohl, noch jetzt leben. Den ersten Unterricht erhielt ich von meinem Vater und wurde dann auf das Bonner Gymnasium aufgenommen. Von den Lehrern dieser Anstalt bin ich Herrn Prof. Dr. Caspar und Herrn Dr. van Hout zu besonderem Danke verpflichtet. Ostern 1880 erhielt ich das Zeugnis der Reife und bezog die Hochschule meiner Vaterstadt, um mich dem Studium der Mathematik, der Physik und der Naturwissenschaften zu widmen. Ich besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren und Docenten:

Clausius, A. Kekulé, Ketteler, Kortum, von Lilienthal, Lipschitz, Meyer, Neuhaeuser, vom Rath, Schaaffhausen, Schönfeld, Strasburger, Troschel.

Sieben Semester gehörte ich dem mathematischen, vier Semester dem physikalischen Seminar als Mitglied an.

Allen meinen verehrten Lehrern schulde ich vielen Dank. Ganz besonders aber fühle ich mich gedrungen, Herrn Geh.-Rath Prof. Dr. R. Clausius und Herrn Prof. Dr. R. Lipschitz für die vielseitige Anregung und die gütige Förderung meiner Studien an dieser Stelle meinen innigsten Dank auszusprechen.
